

МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ  
ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НАВИГАЦИИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ  
СИГНАЛЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ

В.В. Трофимов

В статье исследуются и сравниваются между собой четыре алгоритма работы экстремальных систем навигации (ЭСН), использующих сигналы гиперболической навигационной системы (ИНС). Приводятся зависимости, характеризующие работу каждого алгоритма. Показано не просто пример возможности управления с высокой точностью движением инерционного объекта по заданной траектории с помощью одной из рассматриваемых ЭСН.

Постановка задачи

Принцип действия ИНС основан на определении координат объекта по точке пересечения поверхностей равного положения. В гиперболических системах измерением навигационным параметром является разность расстояний до передающих станций, местоположение которых известно. Поверхности равного положения представляют собой гиперболоиды вращения, в фокусах которых располагаются передающие станции. Одна станция является ведущей (синхронизирующей работу остальных), другие — ведомыми. По точке пересечения трех гиперболоидов или двух гиперболоидов и плоскости можно определить местоположение объекта.

Таким образом, задача навигации по сигналам ИНС сводится к измерению навигационных параметров (разности расстояний), однозначно характеризующих положение объекта относительно известных на поверхности Земли точек, и нахождению по ним координат объекта.

Существующие ИНС обладают рядом существенных недостатков. Основные из них — это сложность исключения влияния на точность местопределения неоднозначности отсчетов и систематических ошибок, вызванных неодинаковыми условиями распространения радиоволн в атмосфере. Как правило, систематические ошибки очень трудно измерить точно существующими методами, так как они зависят от множества факторов, например, времени суток, характеристик подстилающей поверхности, физического состояния атмосферы на траектории распространения радиоволн, сдвига фаз в аппаратуре станций и бортовых приемниках и т.д.

Ошибка местопределения можно уменьшить с помощью метода экстремальной навигации, подробно описанного в [1, 2], за счет более точного определения систематической составляющей, присутствующей при измерении навигационных параметров (ИП). Применение этого метода позволяет также проводить навигацию объекта всего по двум станциям ИНС за счет привлечения дополнительной информации о движении объекта. Конкретная реализация такого метода и будет рассмотрена ниже.

Как указывалось в работах [1, 2], для применения экстремального метода нахождения координат местоположения объекта необходимо иметь эталонное изображение, соответствующее случаю, когда объект находится в известной точке пространства, и реальное, получаемое на борту в процессе движения. Для определения местоположения объекта необходимо максимизировать функционал, представляющий собой оценку взаимно-корреляционной функции реальных изображений.

В качестве эталонного изображения примем координаты ведущей и ведомых станций в исходной декартовой системе координат, относительно которой будем определять местоположение объекта. В качестве реального (текущего) изображения — координаты стан-

ний, получаемые на борту объекта пересчетом измеренных НП. Нахождение координат станции на борту с учетом движения объекта, сводится к решению следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{(x_i + jS_x)^2}{a_{ij}^2} - \frac{(y_i + jS_y)^2}{b_{ij}^2} - \frac{(z_i + jS_z)^2}{c_{ij}^2} = 1, \\ b_{ij}^2 = a_i^2 - a_j^2; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (I)$$

где  $i$  — номер НП, измеряемого на борту объекта;  $j$  — номер измерения во времени  $n$  навигационных параметров;  $\{x_i, y_i, z_i\}$  — координаты ведущей станции в системе координат подвижного объекта;  $a_{ij}$  — значение  $i$ -го НП, измеряемого на борту в  $j$ -й момент времени;  $2c_i$  — длина базы  $i$ -й станции;  $\{S_x, S_y, S_z\}$  — путь, пройденный объектом между измерениями во времени.

Для нахождения координат станций на борту объекта, перемещающегося в трехмерном пространстве, необходимо иметь не меньше трех измерений НП. Их можно получить измерения либо последовательно во времени, либо параллельно, либо последовательно — параллельно. Рассмотрим подробно эти три случая.

#### Последовательное измерение НП

Пусть местоположение объекта, движущегося равномерно и прямолинейно, определяется с помощью системы экстремальной навигации, использующей сигналы двух гиперболических станций ( $i = 1; j = 0, 1, \dots, N$ ; в соотношении (I)). Тогда соотношения, характеризующие местоположение объекта в пространстве (см. уравнения (9), (17) из [2]) с учетом принятых обозначений преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} \zeta_0 = \bar{x}^* - x_1 - S_x \frac{n+1}{2}, \quad S_x = \frac{6 \sum x_i^2 (2i-n-1)}{n(n^2-1)}, \\ \zeta_0 = \bar{y}^* - y_1 - S_y \frac{n+1}{2}, \quad S_y = \frac{6 \sum y_i^2 (2i-n-1)}{n(n^2-1)}, \\ \zeta_0 = \bar{z}^* - z_1 - S_z \frac{n+1}{2}, \quad S_z = \frac{6 \sum z_i^2 (2i-n-1)}{n(n^2-1)}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\{x, y, z\}$  — координаты ведущей станции в исходной системе координат;  $\zeta_0, z_0, \psi_0$  — координаты местоположения объекта в пространстве. А дисперсия этих величин будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2, \quad \sigma_{S_x}^2 = \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 \frac{(2i-n-1)^2}{(n^2-1)^2}, \\ \sigma_y^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{y_i}^2, \quad \sigma_{S_y}^2 = \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{y_i}^2 \frac{(2i-n-1)^2}{(n^2-1)^2}, \\ \sigma_z^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{z_i}^2, \quad \sigma_{S_z}^2 = \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{z_i}^2 \frac{(2i-n-1)^2}{(n^2-1)^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Для нахождения  $\sigma_{x_i}^2, \sigma_{y_i}^2, \sigma_{z_i}^2$  необходимо вывести соотношения, связывающие измеренные на борту объекта разности расстояний ( $2a_i$ ) и координаты ведущей станции. При нахождении этих соотношений для простоты математических выкладок будем рассматривать двумерный случай и считать, что нам известно: местоположение станций и длина их баз ( $2c$ ), разности расстояний, измеренные на борту объекта ( $2a, 2a_1$ ), путь, пройденный объектом между измерениями навигационного параметра ( $S_x, S_y$ ).

Перепишем систему уравнений (I) с учетом принятых ограничений следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2} = 1, \\ \frac{(x+S_x)^2}{a_1^2} - \frac{(y+S_y)^2}{b_1^2} = 1. \end{cases} \quad (4)$$

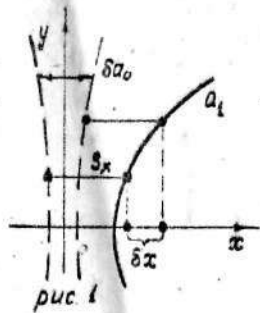
Из соотношений (4) видно, что местоположение объекта находится как точка пересечения двух гипербол, одна из которых сдвинута по соответствующим осям на величины  $S_x$  и  $S_y$ . Для простоты дальнейших выкладок будем считать, что объект движется параллельно базе станций (т.е.  $S_y = 0$ ). Тогда соотношения (4) упрощаются и их решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{b_1^2 a_0^2 S_x \pm a_0 a_1 \sqrt{b_1^2 [b_0^2 (S_x^2 - a_1^2 - a_0^2) + a_0^2 b_1^2]} + b_0^2 a_1^2}{b_0^2 a_1^2 - b_1^2 a_0^2}, \\ y_{1,2} = \pm \frac{b_1}{a_1} \sqrt{(x+S_x)^2 - a_1^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Если  $a_j, c_j$ , измеряются с аддитивной помехой и  $a_i = 0$ , то соотношения для дисперсий можно получить, если разложить в ряд Тейлора выражения (5) и ограничиться линейными членами

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \left[ \frac{(c^2 - a_i^2)(S_x^2 - a_i^2)}{c^2 a_i^2} + 1 \right] \sigma_{a_0}^2, \\ \sigma_y^2 = \frac{S_x^2 (c^2 - a_i^2)}{a_i^2 (S_x^2 - a_i^2)} \sigma_x^2 - \frac{(c^2 S_x^2 - a_i^4)^2}{a_i^2 (c^2 - a_i^2)(S_x^2 - a_i^2)} \sigma_{a_i}^2. \end{cases} \quad (6)$$

Из рассмотрения соотношений (6) видно, что всегда  $\sigma_x^2 > \sigma_{a_0}^2$  и  $\sigma_x^2$  возрастает с увеличением  $S_x$  и уменьшается с ростом  $a_i$ . Для объяснения такого измерения  $\sigma_x^2$  обратимся к рис. 1, на котором штрихпунктирными линиями показаны линии положения для  $a_i$ ,



вызванные ошибкой измерения этого параметра, а сплошной — показана линия положения для  $a_i$ . Из этого рисунка хорошо видно, что с уменьшением пройденного пути угол пересечения прямой  $S_x$  с  $a_i$  стремится к прямому. Ошибки местопределения ( $\delta x$ ) уменьшаются. Кроме того, соотношение  $\sigma_x^2 > \sigma_{a_0}^2$  можно объяснить неравноточностью из-

мерений координат  $\{x, y\}$ , к которой приводит пересчет НП. Чтобы исключить это явление, необходимо ввести коэффициенты, учитывающие ошибки преобразования НП в координаты. Идя по пути последовательного измерения НП, точность местопределения можно повысить за счет увеличения числа измерений. Здесь надо отметить, что данный подход позволяет в принципе проводить навигацию по одному НП, измеряемому последовательно во времени, как это делается, например, при навигации по спутникам [4].

### Параллельное измерение НП

В этом случае при определении местоположения объекта будем пересчитывать  $n$  навигационных параметров, измеренных одновременно, в координаты ведущей станции (т.е. в соотношениях (1)  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 0$ ).

Применяя преобразования, описанные выше, к уравнениям (2) можно получить соотношения для нахождения координат объекта в пространстве. При аналитическом решении такой системы уравнений сталкиваемся с большими трудностями. Поэтому система уравнений (2) решалась численными методами на ЦЕМ при следующих условиях. На вход системы подавались известные разности расстояний вместе с аддитивной помехой, распределенной по нормальному закону со средним, отличным от нуля, и заданной дисперсией  $\sigma_{a_i}^2$ . На выходе системы выдавались координаты объекта с некоторой ошибкой, в зависимости от  $\sigma_{a_i}^2$  изменялась и ошибка в определении координат. Результаты этих исследований сведены в табл. 1, 2 и просчитывались по 20 реализациям. Табл. 1 соответствует случаю, когда навигация проводится по 5 станциям, табл. 2 — по 9. Большей разброс координат местоположения вызван тем, что моделировалась наихудшая ситуация, когда объект находится на границе рабочей области системы гиперболических станций.

Физика этого явления становится понятной при подробном рассмотрении рис. 2, на котором изображены две пересекающиеся под острым углом гиперболы (рисунок отражает наихудшую ситуацию, возникающую на границе области). Здесь хорошо видно, что малые ошибки измерения НП  $\delta a_0$  и  $\delta a_i$  приводят к увеличению разброса координат местоположения  $\delta x, \delta y$ .

Даже в самом лучшем случае, когда гиперболы пересекаются под прямым углом, ошибки местопределения не могут быть меньше,

Таблица 1

$\sigma_0$ (м)	$m_x$ (м)	$m_y$ (м)	$m_x$ (м)	$m_x$ (м)	$\sigma_x$ (м)	$\sigma_y$ (м)	$\sigma_x$ (м)	$\sigma_x$ (м)
200	131	63	148	13	220	121	147	68
400	72	48	85	-60	722	739	870	363
600	238	344	189	177	2160	1555	2793	608
800	-394	-388	-686	-145	4404	4095	6070	1413

Таблица 2

$\sigma_0$ (м)	$m_x$ (м)	$m_y$ (м)	$m_x$ (м)	$m_x$ (м)	$\sigma_x$ (м)	$\sigma_y$ (м)	$\sigma_x$ (м)	$\sigma_x$ (м)
200	25	23	132	-26	177	148	105	51
400	129	130	276	25	453	478	675	190
600	284	228	363	96	970	943	1161	324
800	886	769	1056	188	1429	1433	2348	444

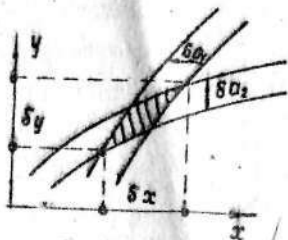


рис. 2

чем  $\sigma_0$  [3]. Следовательно, при использовании значений трех НП, измеренных одновременно, ошибки местопределения могут только увеличиваться. Повышение точности, как видно из табл. 1 и 2, здесь может происходить за счет увеличения количества станций и требует больших затрат на их создание и обслуживание.

## Последовательно-параллельное измерение НП

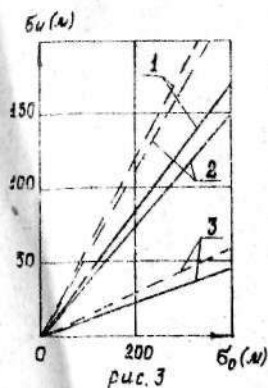
Как было показано выше, повышение точности местопределения может быть достигнуто либо многократным измерением одного НП в процессе движения по траектории, что приводит к увеличению времени между выдачей координат объекта и к усложнению самого алгоритма, либо увеличением числа измеренных одновременно НП, что требует дополнительных затрат на увеличение количества станций.

Рассмотрим комбинированный алгоритм, сочетающий в себе два вышележащих способа. Такой алгоритм использует информацию, полученную многократным измерением фиксированного числа НП во время движения. Его исследование будем проводить также методом математического моделирования на ЦМ.

Алгоритм функционирования рассматриваемой системы описывается соотношениями (1), (2) ( $i = 1, 2, 3; j = 0, \dots, M$ ). Привлечение дополнительной информации позволяет расширить пространство поиска до девяти и находить кроме трех координат объекта его скорость движения и три систематические составляющие ошибок измерения НП.

Зависимости ошибок местопределения от среднеквадратического отклонения (с.к.о.) измерений НП ( $\sigma_0$ ) приведены на рис. 3. Здесь пунктирной линией показаны кривые, полученные при числе измерений тройки НП, равном 20, а сплошной — 50. Наклон кривых зависит от местоположения объекта в пространстве (от угла пересечения гипербол (см. рис. 1)).

Влияние ошибок измерения скорости движения на точность местопределения приведено на рис. 4. По оси ординат отложено с.к.о. круговой ошибки местопределения. Так, при  $\sigma_y = 100$  м/с. ошибка местопределения  $\sigma_{кр} = 35$  м (ошибки измерения НП считались равными нулю).



Сравнивая с.к.о.  $\sigma_x = 120$  м, полученное при ошибке измерения НП  $\sigma_r = 200$  м (рис.3) с аналогичным значением  $\sigma_x = 700$  м, полученным для алгоритма, использующего всего одно измерение тройки НП, можно сделать вывод, что привлечение дополнительной информации позволило увеличить точность местоопределения более чем в 5 раз.

Более детальный анализ причин, вызывающих ошибки местоопределения, указывает на необходимость введения либо весовых коэффициентов, учитывающих неравноточность пересчета НП в координаты станций на изображении, либо более сложной модели получения разности расстояний, в которой не производится пересчет навигационных параметров. Рассмотрим подробно второй случай.

ЭСН, использующая модель получения НП.

В качестве модели получения НП будем использовать следующую модель, учитывающую прямолинейное равномерное движение:

$$2a_{ij}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) = x_{ij} - x_{0j} + \Delta t_i \quad (7)$$

$$z_{kj} = \sqrt{\sum_{l=1}^3 [u_l - y_{lk} + f(j, \Delta t, \vec{v}, \dots)]^2} \quad (8)$$

где  $j = \overline{1, \dots, N}$  - номер  $i$ -го НП в процессе движения;  
 $\vec{u}$  - вектор координат объекта в момент начала измерений;  
 $\vec{v}$  - вектор скорости;  $\vec{z}$  - вектор систематических составляющих ошибок измерений;  $y_k$  - координаты  $k$ -й станции.

В случае переменного движения объекта соотношение (8) примет следующий вид:

$$z_{kj} = \sqrt{\sum_{l=1}^3 [u_l - y_{lk} + f(j, \Delta t, \vec{v}, \dots)]^2} \quad (9)$$

где  $f(j, \Delta t, \vec{v}, \dots)$  - функция, характеризующая собой траекторию движения объекта, точнее путь, пройденный объектом между измерениями.

На основе модели, описываемой соотношениями (7), (8), сформируем квадратичный функционал следующего вида:

$$\Phi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^N [a_{ij}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) - a_{ij}^*]^2 \quad (10)$$

где  $a_{ij}^*$  - измеренные на борту НП. Экстремум данного функционала несет информацию о значении параметров  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$ .

Точность определения значений  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$  будет зависеть от величин  $n, N$  и дисперсии ошибок определения навигационных параметров  $\sigma_{a_i}^2$ . Для определения количественных характеристик ошибок определения параметров движения проводилось моделирование на ЦВМ при следующих условиях. Местоположение гиперболической системы навигации определялось координатами Дальневосточной цепочки станций системы "Лоран-С" [3]. Начало исходной системы координат совмещено с ведущей станцией так, что ось  $Ox$  направлена на Север, ось  $Oz$  - на Восток. Движение объекта происходило из начальной точки  $u_0 = \{400, 100, 200\}$  км со скоростью  $\vec{v} = \{1000, 0, 1000\}$  км/ч; измерение НП происходило через интервалы времени  $\Delta t = 1$  с,  $N = 3$ .

Зависимость с.к.о. координат местоопределения и скорости движения от с.к.о. помехи приведены на рис. 5-6 при 20 изме-

ранних тройки ИЛ. Так, при  $\sigma_a = 200$  м ошибки местопредели-

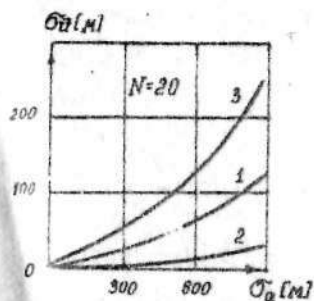


Рис. 5.

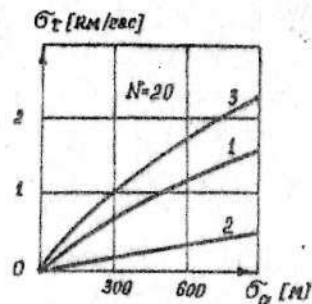


Рис. 6.

не превышали 50 м, а скорости — 0,5 км/ч. На рис. 7 приведены кривые, характеризующие точность местоопределения при изменении числа измерений ( $\sigma_a = 300$  м). Из этого рисунка хорошо видно существенное уменьшение ошибки местоопределения при увеличении

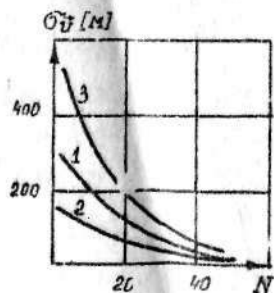


Рис. 7.

числа измерений до 30, при дальнейшем увеличении числа измерений ошибка местоопределения убывает незначительно.

Для удобства сравнения с зависимостями ранее (рис. 3), моделирование проводилось в предположении, что скорость движения объекта измеряется

на борту автономными средствами точно, и определяются только значения координат местоположения и систематических ошибок  $\vec{z}$ . Результаты моделирования приведены на рис. 8. Из сравнения этих кривых с аналогичными кривыми предыдущих алгоритмов видно, что, исключив блок пересчета, удалось повысить точность местоопределения почти на порядок.

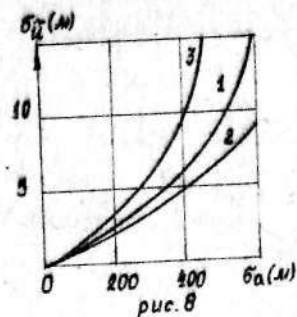


рис. 8

Из рассмотренных выше алгоритмов видно, что последний обладает высокой точностью и наибольшей помехоустойчивостью. Поэтому представляет интерес рассмотрение вопроса об управлении движением объекта по заданной траектории с помощью ЭСН, использующей модель получения ИЛ.

Управление с помощью ЭСН движением инерционного объекта по заданной траектории

Воздействия органов и устройств управления на летательном аппарате (ЛА) в процессе движения должны приводить к ликвидации его отклонения от заданной траектории. Для простоты модель ЛА будет состоять из устройства управления (УУ), изменяющего направление скорости движения, и объекта управления, описываемого дифференциальным уравнением первого порядка и имеющего следующую простую передаточную функцию по скорости движения:

$$W(p) = \frac{K}{T_p p + 1} \quad (11)$$

Устройство управления определяет направление и величину изменения скорости движения на основе координат местоположения, выдаваемых ЭСН (модуль скорости движения считается постоянным), по следующим соотношениям:

$$\vec{V}_{k+1} = [\vec{x}(t_k^*) - \vec{q}_k] / t_{np}, \quad (12)$$

где  $\vec{q}_k$  — вектор координат, определяемый ЭСН на  $k$ -м шаге коррекции;  $t_{np}$  — заданный интервал времени, в течение которого объект должен выйти на заданную траекторию;  $\vec{x}(t_k^*)$  — точка эталонной траектории, задаваемой в параметрическом виде;  $t_k^*$  —

параметр траектории, определяемый из следующего уравнения:

$$\|\vec{V}_k\| \cdot t_{пр} = \|\vec{x}(t_k) - \vec{y}_k\| \quad (13)$$

Результаты моделирования ЭСН, управляющей подвижным инерционным объектом, приведены на рис. 9. Ю. На рис. 9 приведена зависимость с.к.о. расстояния между эталонной траекторией

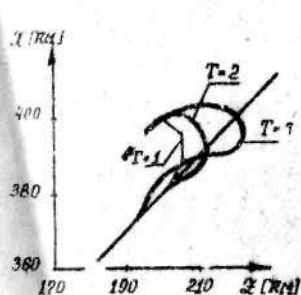


Рис. 9.

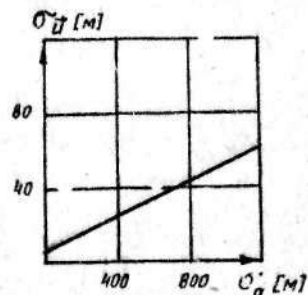


Рис. 10.

и подвижным объектом ( $\sigma_a$ ) от с.к.о. ошибок измерения НП в случае безинерционного объекта. Из этого рисунка видно, что с увеличением дисперсии ошибок измерения НП отклонения объекта от эталонной траектории незначительно. Так, при ошибке измерения НП  $\sigma_a = 600$  м  $\sigma_y = 30$  м. Это говорит о большой эффективности системы управления ЛА по заданной траектории с помощью ЭСН.

На рис. 10 приведены траектории движения объектов с различными постоянными времени  $T$ . Перерегулирование в рассматриваемой системе объясняется ошибкой местоопределения, возникающей из-за использования линейной модели движения объекта (соотношение (8)). Для ликвидации этой ошибки необходимо уточнить вид функции  $f(j, \Delta t, \vec{u}, \dots)$  в соотношении (9).

### Заключение

В данной работе получены следующие результаты

1. Основным преимуществом экстремальных систем навигации, использующих сигналы гиперболических станций, по сравнению с традиционными гиперболическими навигационными системами является оптимальная обработка результатов измерений и более точное определение систематических составляющих ошибок измерения навигационных параметров и их исключение, что позволяет существенно повысить точность местоопределения.

2. Исследование алгоритма работы ЭСН, использующей модель получения НП, показало высокую точность местоопределения (почти на порядок) и большую помехоустойчивость по сравнению с алгоритмами работы ЭСН, использующих пересчет НП в координаты станций.

3. Показана возможность управления с высокой точностью движением инерционного объекта по заданной траектории с помощью ЭСН, использующей модель получения НП.

4. Путем комплексирования инерционных систем с гиперболическими ЭСН представляется возможным избавиться от основного недостатка последних — выдачи координат объекта через конечный интервал времени, необходимый для набора измерений и их последующей обработки.

### Литература

1. Белоглазов И.Н., Тарасенко В.П. Корреляционно-экстремальные системы. М., "Сов.радио", 1974.
2. Тарасенко В.П., Трофимов В.В. О методах повышения точности корреляционно-экстремальных систем навигации, использующих радиолокационные изображения местности. В сб.: Корреляционно-экстремальные системы обработки информации и управления. Томск, 1975.